

Modell(-beziehung) := $[\psi]^{\mathfrak{I}} = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \psi$ „ \mathfrak{I} erfüllt ψ “ @Menge: $\mathfrak{I} \models \varphi \forall \varphi \in \Phi \Leftrightarrow \varphi \models \Phi$
 Wenn $\Phi = \emptyset$, dann (**Konj.**) $\wedge \Phi = 1$ und (**Disj.**) $\vee \Phi = 0$. Erfüllbarkeit von al. Formeln (SAT) ist NP-vollst.
 #ToDo: falls $\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg \varphi\}$ unerfüllbar (suche Interpretation) \Rightarrow Aussage richtig ($|\Phi| < \infty \Rightarrow \wedge \Phi \wedge \neg \varphi$)

- | | |
|---|--|
| 1. $\neg \neg \psi \equiv \psi$ Elimination der doppelten Negation | 7. $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$ Kommutativität |
| 2. $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg \psi \vee \neg \varphi$ de Morgan'sche Gesetze | $\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$ |
| $\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg \psi \wedge \neg \varphi$ | 8. $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$ Assoziativität |
| 3. $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$ Distributivges. | $\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$ |
| 4. $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \varphi \rightarrow \neg \psi$ Kontraposition | 9. Semantisches Argument: " $X \vee \neg X \equiv 1$ " |
| 5. $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$ Absorption | 10. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$ |
| 6. $\psi \wedge \psi \equiv \psi$ Idempotenz | 11. $B \rightarrow 0 \equiv \neg B$ & $1 \rightarrow A \equiv A$ |
| $\psi \vee \psi \equiv \psi$ | 12. $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg \psi \vee \varphi$ |
| 14. $\forall x \psi \equiv \neg \exists x \neg \psi$ | 13. $(1 \rightarrow F) \wedge (B \rightarrow 0) \equiv F \wedge \neg B \equiv \neg(\neg F \vee B)$ |
| 15. $\neg \forall x \psi \equiv \exists x \neg \psi / \neg \exists x \psi \equiv \forall x \neg \psi$ | 16. $\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg \varphi\}$ |

Tautologie/allgemeingültig := $\models \psi$ = jede passende Interpretation ist Modell (= alle Interpretationen erfüllbar.)

disjunktive Normalform (DNF): $\vee \wedge x_{ij}$ konjunktive NF (KNF): $\wedge \vee x_{ij}$ 3-KNF: $\wedge_{i=1}^n Y_{i1} \vee Y_{i2} \vee Y_{i3}$

Satz 1.9: Zu jeder Formel gibt es eine DNF. (\Rightarrow Umwandlung von DNF nach KNF möglich. (bool. Fkt.))

Funktional vollständig: $\{ \wedge, \vee, \neg \}, \{ \wedge, \neg \}, \{ \vee, \neg \}, \{ \rightarrow, \neg \}, \{ \rightarrow, 0 \}, \{ \wedge, xor, 1 \}, \{ | \}$; **nicht**: $\{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$

Horn-Formel := Formel in KNF ($\wedge_i \vee_j x_{ij}$), wobei jede Disjunktion ($\vee_j x_{ij}$) max. 1 positives Literal enthält!

Auch als Konjunktion: $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \dots \wedge X_k \rightarrow X$ ($k=0: (1 \rightarrow X)$) & $\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \dots \wedge X_k \rightarrow 0$

Satz 1.13: Es gibt al. Formeln, die nicht zu einer HF äquivalent sind. (HF ist erfüllbar oder hat kleinstes Modell).

Falls zu zeigen ist, dass $\varphi_i = \neg X \vee Y \vee Z$ **keine HF ist**: Finde Interpretationen $\mathfrak{I}_1: (x, y, z) \mapsto (1, 1, 0)$ und

$\mathfrak{I}_2: (x, y, z) \mapsto (1, 0, 1)$. Da $\mathfrak{I}_1 \models \varphi_i$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi_i$ aber $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \not\models \varphi_i$ ist, ist φ_i **nicht** zu einer HF äquivalent.

Bsp.-umf.: $\{ A \wedge B \rightarrow C, D \wedge E \rightarrow A, C \wedge F \rightarrow D, F \wedge D \rightarrow E \} \models B \vee C \vee (F \rightarrow B)$
 $\equiv (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (D \wedge E \rightarrow A) \wedge (C \wedge F \rightarrow D) \wedge (F \wedge D \rightarrow E) \wedge (B \rightarrow 0) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow F) \wedge (B \rightarrow 0)$

Erfüllbarkeitstest/Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln := (Input: aussagenlogische HF: $\psi = \wedge_i C_i$)

Gegeben: $(1 \rightarrow X) \wedge (X \wedge Y \rightarrow Z) \wedge (U \rightarrow 0) \wedge (Z \wedge Y \rightarrow U) \wedge (V \rightarrow Y) \wedge (1 \rightarrow V)$

$M_0 = \{ X, V \}; M_1 = M_0 \cup \{ Y \}; M_2 = M_1 \cup \{ Z \}; M_3 = M_2 \cup \{ U \}; U \rightarrow 0$ liefert Widerspruch \Rightarrow Formel **unerfüllb.**

Kompaktheits-Satz: führt Erfüllbarkeit und Folgerungsbeziehung von unendliche Mengen auf endliche zurück.

- §1: Φ ist erfüllbar \Leftrightarrow jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.
 §2: $\Phi \models \psi$ "aus Φ folgt ψ " \Leftrightarrow endliche Teilfolge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert, so dass $\Phi_0 \models \psi$.

Lemma 1.16 (Zorn): Sei $(A, <)$ nicht-leere partielle Ordnung, in der jede Kette nach oben beschränkt. Dann besitzt $(A, <)$ ein maximales Element.

Lemma 1.17 (König): Sei T endlich verzweigter Baum mit Wurzel w, in dem es beliebig lange endliche Wege gibt. Dann gibt es auch einen unendl. Weg in T (der bei der Wurzel beginnt).

Aussagenlog. Resolution: syntaktisches Verfahren, um die Unerfüllbarkeit von Formeln in KNF nachzuweisen.

Klausel := endliche Menge von Literalen (leere Klausel := \square). Formel in KNF \Rightarrow Jede Disj. $\vee x$ wird Klausel C_i .

$\{ X_1, \neg X_2 \} \{ X_2, X_3 \} \{ \neg X_1, \neg X_2, X_3 \} \{ \neg X_3 \} = Res^0(\varphi) = K = \{ \{ (X_1 \vee \neg X_2) \}, \{ (X_2 \vee X_3) \}, \dots \}$ $\varphi :=$
 $(X_1 \vee \neg X_2) \wedge (X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \wedge (\neg X_3)$
 $Res^1(\varphi) = Res^0(\varphi) \cup \{ \{ X_1, X_3 \}, \{ \neg X_1, X_3 \}, \dots \}$
 $Res^2(\varphi) = Res^1(\varphi) \cup \{ \{ X_3 \}, \dots \}$ $\blacktriangleleft \blacktriangleright$ "Resolventen"
 $Res^3(\varphi) = Res^2(\varphi) \cup \{ \square \} = Res^4(\varphi) = Res^*(\varphi)$
 $\Rightarrow \square \in Res^*(K) \Rightarrow \varphi$ **unerfüllbar** (bei \notin erfüllbar).

Falls z. z. Formel allgemeingültig: zeige, das in $K(\neg \varphi)$ \square ableitbar: $\square \in Res \Rightarrow \neg \varphi$ unerf. $\Rightarrow \varphi$ allgemeing.

Gilt $\psi \models \varphi$? $\psi \models \varphi \Leftrightarrow \psi \wedge \neg \varphi$ unerf. $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\psi \wedge \neg \varphi)$: mache Resolut. auf $K(\psi) \cup K(\neg \varphi)$, ψ, φ in KNF!

Einheitsresol. (HF) (immer nur mit einzelнем Literal ableiten) ist allgemein **nicht vollständig**! Gegenbsp:

$\{ \{ X, Y \}, \{ X, \neg Y \}, \{ \neg X, Y \}, \{ \neg X, \neg Y \} \}$ ist unerfüllbar, aber \square ist **nicht** ableitbar! **Doppelres.** ist **nicht** korrekt, aber vollst.! Gegenbsp.: $\psi = (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$ **Positiv-Res.** korrekt/vollst.! **Leere Klauselm. \emptyset ist erfüllbar!**

Aussagenl. Sequenzenkalkül: Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist **gültig**, wenn jedes Modell von Γ (**Antezedens**) auch ein Modell mindestens einer Formel aus Δ (**Sukzedens**) ist. d.h. $\wedge \Gamma \models \vee \Delta$. Wenn also $\Gamma \Rightarrow \Delta$ **nicht gültig** ist, dann existiert eine Interpretation \mathfrak{I} in der alle Formeln aus Γ wahr und alle Formeln aus Δ falsch sind. In diesen Fall sagen wir, dass \mathfrak{I} die Sequenz **falsifiziert**. (Großbuchstabe = Menge!)

Falls zu zeigen, dass Sequenz **ungültig**: dann suche Interpretation, welche für alle Γ wahr, aber für alle Δ falsch.

- Jede Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mit $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ ist gültig. Solche Sequenzen sind die **Axiome** des Sequenzenkalküls.

$x \Rightarrow \emptyset \Leftrightarrow x \Rightarrow 0, \emptyset \Rightarrow x \Leftrightarrow 1 \Rightarrow x$ **Schlussregeln:** oben (**Prämisse**) und unten (**Konklusion**):

$(\neg \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg \psi \Rightarrow \Delta}$	$(\vee \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta}$	$(\wedge \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta}$	$(\rightarrow \Rightarrow) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta}$
$(\Rightarrow \neg) \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \psi}$	$(\Rightarrow \vee) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$	$(\Rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$	$(\Rightarrow \rightarrow) \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$

Beweis im SK: Baum. §1: Jedes Blatt mit Axiom beschriftet. §2: Jeder innere Knoten mit Schlussregel beschriftet \Rightarrow Seq. ist im SK ableitbar gdw. tritt auf als Beschriftung eines Knotens. **Aus nicht-Ax.-Blättern folgt fals. \exists !**

Lemma 1.28: \exists falsifiziert die Konklusion gdw. \exists eine Prämisse falsifiziert \Rightarrow Konkl. gültig gdw. Präm. gültig

Beweis im SK für $\psi := (X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$: Starte mit $\emptyset \Rightarrow \psi$, erzeuge Baum bis Axiome (§1) \Rightarrow Erfolg.

ToDo: Sequenz $(X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge Y)$ gültig? Suche Interpretation, so dass $\llbracket X \vee Y \rrbracket^3 = 1$ und $\llbracket X \wedge Y \rrbracket^3 = 0$, dann

$\exists(X)=0, \exists(Y)=1$ links ein Widerspruch $\Rightarrow \exists$ falsifiziert Sequenz! Sonst: mache Beweis im SK \Rightarrow S. gültig.

ToDo: Schlussregel korrekt? Konklusion fälschen. Wenn Prämisse auch falsifizierbar \Rightarrow Schlussregel korrekt.

Def. 1.31: Ein Ableitungsbaum ist **vollständig**, wenn alle Blätter positiv (Axiom) oder negativ sind. Wenn alle Blätter positiv sind, handelt es sich um nen **Beweis**; wenn T ein negatives Blatt enthält, dann um 'ne **Widerlegung**.

Prädikatenlogik – FO – first order logic:

Literal := positives oder negatives Atom (mit und ohne \neg).

In FO gibt es keine Interpretationen. Man spricht stattdessen über Modell! $\exists|\varphi$

$\llbracket \varphi \rrbracket^3$

atomar/Atom := Formel nur mit “=” und Funktionen (ohne $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$). **quantorenfrei** := F. ohne \exists, \forall .

freie Variablen: Für atome Formeln ψ ist $frei(\psi) := var(\psi)$.

$frei(\exists x \psi) = frei(\forall x \psi) := frei(\psi) \setminus \{x\}$

$frei(\psi \circ \varphi) := frei(\psi) \cup frei(\varphi)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

$\psi(x_1, \dots, x_n)$ deutet an, dass x_1, \dots, x_n frei.

$frei(\neg \psi) := frei(\psi)$.

Ein τ -Satz ist eine τ -Formel ohne freie Variablen $\Leftrightarrow frei(\psi) = \emptyset$.

$2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ist $\{+\}$ -abgeschlossen. Also ist $(2\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{N}, +)$. Hingegen ist $2\mathbb{N}+1 := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$

nicht $\{+\}$ -abg. und kann somit nicht Träger einer (Δ) Substruktur von $(\mathbb{N}, +)$ sein. Die additive Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist das $\{+, 0\}$ -**Redukt** des Körpers der reellen Z. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. (umgekehrt: **Expansion**)

Ein Zoo von Strukturen:

Das **Wort** $w = abcbac$ über dem Alphabet $\{a,b,c\}$ wird also die Wortstruktur

$B(w) = (\{0,1,2,3,4,5\}, <, P_a, P_b, P_c)$ mit $P_a = \{0,4\}$, $P_b = \{1,2,5\}$ und $P_c = \{3\}$ repräsentiert.

Partiell Ordnung: $\{<\}$ -Struktur $(A, <)$, welche entspr. irreflexiv, transitiv, antisymmetrisch und vergleichbar.

Bsp.: $\psi := \exists z (Exz \wedge Ezy)$ & $\varphi := \forall x \forall y (Exy \rightarrow \psi)$. Dann ψ $\{E\}$ -Formel mit $frei(\psi) = \{x, y\}$ und φ $\{E\}$ -

Satz. $\exists = (A, \beta)$ mit $A = (\mathbb{N}, E^A)$, $E^A = \{(m,n) : m \text{ echter Teiler von } n\}$ und $\beta(x)=2, \beta(y)=36$ Modell von $\psi(x, y)$,

d.h. $A \models \psi(2,36)$. Gilt z.B. für $m=6$. | Unter $x \rightarrow 2, y \rightarrow 4$ gilt dies nit, da \mathbb{N} nit dicht. ($\mathbb{Q}, <$) wäre Modell, da dicht.

Beispiele in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$: a teilt b: $\varphi_1(a, b) := \exists x (a \cdot x = b)$ a \leq b: $\varphi_{\leq}(a, b) := \exists z (a + z = b)$ @ $\mathbb{R} : z \cdot z$

a ist Primzahl: $\varphi_{prim}(a) := \forall x (\varphi_1(x, a) \rightarrow (x=a) \vee (x=1)) \wedge a \neq 1$ a < b: $\varphi_{<}(a, b) := \varphi_{\leq}(a, b) \wedge a \neq b$

a und b sind teilerfremd: $\varphi(a, b) := \forall x (\varphi_1(x, a) \wedge \varphi_1(x, b) \rightarrow x=1)$ x = 2: $\varphi_{=2}(x) := \exists u (u=1 \wedge x=u+u)$

a ist eine Zweierpotenz: $\varphi(a) := \forall u (\varphi_1(u, a) \wedge (\varphi_{prim}(u) \rightarrow u=1+1))$ x = 1: $\varphi_1(x) := \forall y (x \cdot y = y)$

a Primpotenz p^n : $\varphi(x) := \exists y (y|x \wedge \varphi_{prim}(y) \wedge \forall z (z|x \rightarrow z=y \vee z=x \vee z=1))$ x = 0: $\varphi_0(x) := \forall y (x \cdot y = y)$

Mod(Φ) = Modellkl. von Φ = alle τ -Strukt. mit $\tau|=\Phi$. Klasse $K = Mod(\Phi) \Rightarrow \Phi$ **Axiomensystem für K**

Bsp: ungerichtete Graphen $\Phi_{Graph} = \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)\}$; $\varphi_{\infty} = \psi$ “ ψ gilt in allen unendl. Struk.”;

alle linearen Ordnungen: $\Phi_{<} = \{\forall x \neg x < x, \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z), \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)\}$

ψ hat Modell $\Rightarrow \psi$ erfüllbar, sonst unerfüllbar.

ψ allgemeingültig $\Leftrightarrow \models \psi \Leftrightarrow$ jede passende

Interpretation ist Modell von ψ .

ψ und φ log. äquiv. ($\psi \equiv \varphi$) $\Leftrightarrow \psi|=\varphi$ und $\varphi|=\psi$

Lemma 2.16: \forall FO-Formel ex. äquivalente **reduzierte** mit nur \vee, \neg, \exists (ohne $\wedge, \rightarrow, \forall$). $\forall x \psi \equiv \neg \exists x \neg \psi$

NegationsNF: kein \rightarrow & \neg nur auf Atomen! Also nur $\vee, \wedge, \exists, \forall$, pos. & neg. Literale. **! \equiv !**

ToDo: \neg nach innen ziehen und \rightarrow eliminieren: $\neg \exists x (Rxy \wedge \forall z (Sxz \rightarrow Ryy)) \equiv \forall x \neg (Rxy \wedge \forall z (Sxz \rightarrow Ryy))$

Beispiel: $\equiv \forall x (\neg Rxy \vee \neg \forall z (Sxz \rightarrow Ryy)) \equiv \forall x (\neg Rxy \vee \exists z \neg (Sxz \rightarrow Ryy)) \equiv \forall x (\neg Rxy \vee \exists z (Sxz \wedge \neg Ryy))$

Lemma 2.19: \forall Formeln ex. äquival. **termreduzierte** (nur Atome der Form $R\bar{x}, f\bar{x} = y, x = y$ (Termtiefe < 2))

PränexNF: alle Quantoren stehen vorne und **bereinigt** (keine Variable kommt frei und gebunden vor) **! \equiv !**

ToDo: 1.) NNF $\psi := \neg \forall x \neg Rxx \wedge \forall x \exists y (Rxy \wedge (\neg Ryy \wedge \exists x Rxy)) \equiv \exists x Rxx \wedge \forall x \exists y (Rxy \wedge \exists x (\neg Ryy \wedge Ryx))$

#2) berein. 3) Q. nach vorn $\equiv \exists u Ruu \wedge \forall x \exists y \exists z (Rxy \wedge (\neg Ryy \wedge Ryz)) \equiv \exists u \forall x \exists y \exists z (Ruu \wedge Rxy \wedge \neg Ryy \wedge Ryz)$

SkolemNF: # **ToDo:** Eliminiere Existenzq. aus PNF von a. nach innen. erfüllbarkeitsäquivalent, aber **! nicht \equiv !**

$\forall x \forall y \quad \forall u' \exists x' ((x = fygxy \wedge \neg Rgxyu') \vee (Sxz \wedge Rx'y))$ Existenzquantoren werden ersetzt durch neue

$\forall x \forall y \quad \forall u' \quad ((x = fygxy \wedge \neg Rgxyu') \vee (Sxz \wedge Rhxyu' y))$ Funktionen mit abhängigen Allquantoren.

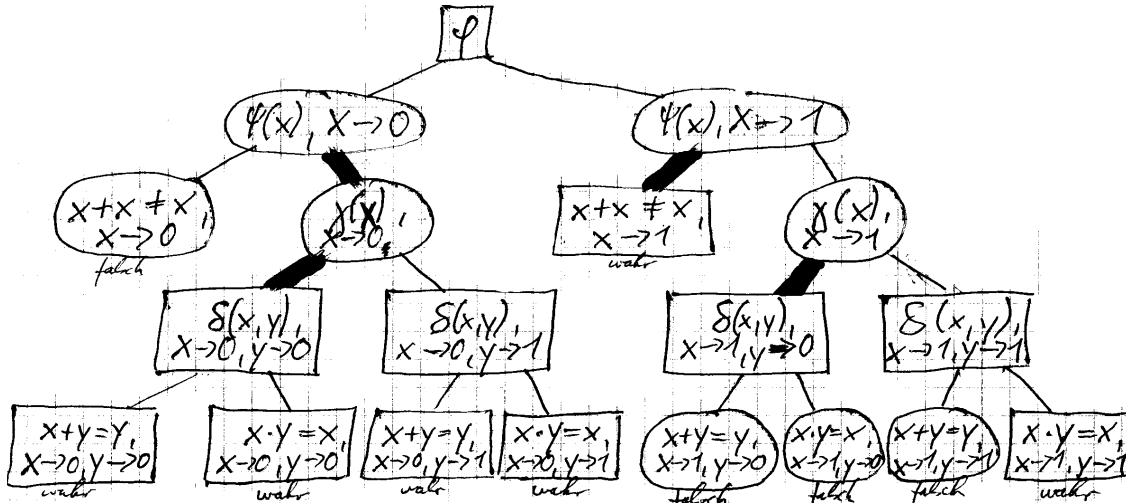
Beispiele: x hat min. n direkte NF: $\varphi(x) := \exists y_1 \dots \exists y_n (\bigwedge_{i=1}^n Exy_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} y_i \neq y_j)$; es gibt Zyklus der Länge 4: $\varphi(x) = \exists y_1 \dots \exists y_4 (\bigwedge_{i=1}^3 Eyi y_{i+1} \wedge Ey_4 y_1 \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} y_i \neq y_j)$; es gibt einen Weg der Länge $\leq n$ von x nach y : $\varphi(x, y) = \exists x_0 \dots \exists x_n (x_0 = x \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} (Ex_i x_{i+1} \vee x_i = x_{i+1}))$; zykelfreier Graph: $\forall x \forall y \neg (Exy \wedge x = y)$; es gibt Clique der Größe n die x enthält: $\varphi(x) = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (Ex_i x_j \wedge x_i \neq x_j) \wedge x_1 = x)$; vollständiger Graph: $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$;

Auswertungsspiel MC(A, ψ):

Verifizierer $V \circ$ (sucht Modell): \forall ,
 Falsifizierer $F(\square)$: \wedge ,

Verloren hat der Spieler, der am Zug ist, aber nicht ziehen kann.

$\exists x$, Literal falsch \rightarrow Falsifizierer hat gewonnen.
 $\forall x$, Literal wahr \rightarrow Verifizierer hat gewonnen.

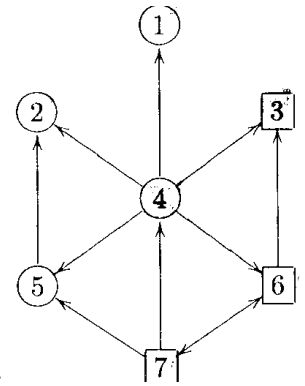


◀ Gewinnstrategie für Verifizierer: von allen \circ möglichst runter zu \square .
 (hier: unten rechts: egal, weil V immer verliert, da $F(\square)$ danach dran ist.)

Gewinnstrategie für Falsifizier: von allen \square möglichst zu \circ .

- Blätter (invertiert) zuordnen: Kästen: $W_0 = \{3\}$, Kreise: $W_1 = \{1,2\}$.
- a) wenn 0 dran und ein direkter Nachfolger in W_0 ist, dann ist er auch selbst in W_0 .
 b) wenn 0 dran und alle direkten Nachfolger sind in W_1 , dann ist er auch selbst in W_1 .
 ... und entsprechend umgekehrt für Spieler 1 bei a) W_1 und bei b) W_0

Kreise gehören Spieler 0: $W_0 = \{3,4\}$; Kästen gehören Spieler 1: $W_1 = \{1,2,5,6,7\}$
 Idee: Kreise W_0 ein und Käste W_1 , dann will Spieler 0 zu Kreis und Spieler 1 (\square) zu Kasten.



ML – Modallogik: lokale Sichtweise; keine Aussagen über Vorgänger; $\langle a \rangle$ und $[a]$ als Einschr. von \exists und \forall . Einbettung in FO möglich; Wenn nur eine Aktion a vorhanden, dann schreibt man für $\langle a \rangle \psi : \diamond \psi$ "möglicherweise" & für $[a] \psi : \square \psi$ "notwendigerweise".

Transitionsys./Kripkestr.: $K = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$, wobei V Universum, $E_a \subseteq V \times V$ 2-st. Rel., $P_i \subseteq V$ 1-st. Rel. **Satz 3.21:** ML hat die Baummodell-Eigenschaft.

	a-NF	a-NF
$\langle a \rangle 1$	ja	-
$\langle a \rangle 0$	-	-
$[a] 1$	ja	ja
$[a] 0$	-	ja
$[[a]0]^k$	$\{4,5\}$	

$[b]0$ – es ex. kein b-NF $\langle a \rangle 0$ – falsch/unmöglich $\langle a \rangle 1$ – es ex. a-NF
 $\langle a \rangle P$ – es ex. a-NF in dem P gilt $[b]Q$: in allen b-NF gilt Q (inkl. die keinen b-NF haben!!!)

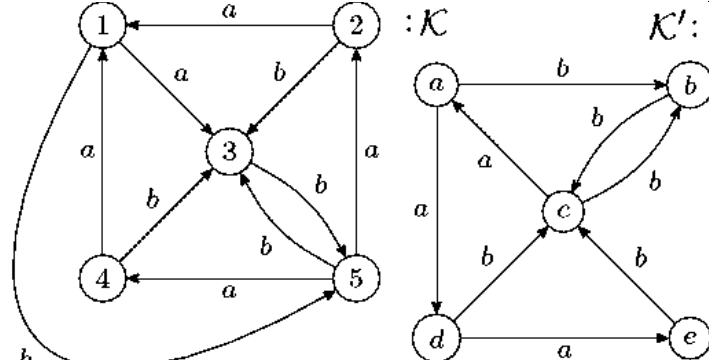
Satz 3.6: Zu jeder Formel $\psi \in ML$ gibt es Formel $\psi^*(x) \in FO^2$ (FO mit 2 Var), so dass: $K, v \models \psi \Leftrightarrow K \models \psi^*(v)$

Bsp: $\langle a \rangle \langle a \rangle \langle a \rangle \langle a \rangle P$ (ML) $\Rightarrow \psi(x) := \exists y (Exy \wedge \exists x (Eyx \wedge \exists y (Exy \wedge \exists x (Eyx \wedge \exists y (Exy \wedge Py)))))$ (FO²)

Bsp: $\varphi(x) := \forall y \exists z (Exy \rightarrow Eyz) \equiv \forall y (Exy \rightarrow \exists z (Eyz)) \equiv \forall y (Exy \rightarrow (0 \vee \exists z (Eyz \wedge 1))) \equiv \square (\diamond 1 \vee 0) \equiv \square \diamond 1$

Wenn FO \rightarrow ML nicht geht, dann finde: bisimilares Trans.sys., also nur in FO untersch.'bar (z.B. wg. Vorgänger)

Modaltiefe (md): 1.) $md(\psi) = 0$ für al. F. ψ , 2.) $md(\neg\psi) = md(\psi)$, 4.) $md(\langle a \rangle \psi) = md([a]\psi) = md(\psi) + 1$.



	1	2	3	4	5
a	$\langle a \rangle [a]0$	~	$[a]0$	~	$\langle a \rangle \langle a \rangle \langle a \rangle 1$
b	$\langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle 1$	~	$\langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle 1$ (m=0)
c	$\langle a \rangle [a]0$	$\langle a \rangle \langle a \rangle [a]0$	$[a]0$	$\langle a \rangle \langle a \rangle [a]0$	~
d	~	$\langle a \rangle \langle a \rangle 1$	$[a]0$	$\langle a \rangle \langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle \langle a \rangle 1$ (m=1)
e	$\langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle 1$	~	$\langle a \rangle 1$	$\langle a \rangle 1$ (m=0)

"Bisimilar sind $\{(2,a), (4,a), (3,b), (5,c), (1,d), (3,e)\}$ "
 (Falls $K = K'$, dann $\sim_{max} = \{ \dots \} \cup \{ (v,v) : v \in V \}$) !!!

Idee: "1 und b lassen sich unterscheiden, da in 1 ein a-NF existiert und in b nicht $\Rightarrow \langle a \rangle 1$ " **md = m + 1** ▲

ToDo: Transitionssystem mit min. Zuständen: Bisimulation auf sich selbst! In dem Bsp. oben: ist $\sim = \{(2,4)\}$.

$\psi = (R x_0 x_2 \wedge \exists x_0 (R x_0 x_1 \wedge R x_0 x_2)) = (R x_0 x_2 \wedge \exists x_3 (R x_3 x_1 \wedge R x_3 x_2)) = (R x_4 g x_0 x_0 \wedge \exists x_3 (R x_3 c \wedge R x_3 g x_0 x_0))$

mit $(x_1/x_4, x_1/c, x_2/g x_0 x_0)$. Simultan \neq Hintereinander, jedoch sim'bar: $\varphi[x/y, y/x] = \varphi[y/z][x/y][z/x]$.

LTL = CTL ohne A und E – (un)endliche Wörter & Pfade; kann in FO eingebettet werden, wenn “<” in Signatur, sonst geht z.B. 'GF P' nicht; abgeschlossen; $G(\psi \wedge \varphi) \equiv G\psi \wedge G\varphi$ $\varphi U \psi \equiv \psi \vee (\varphi \wedge X(\varphi U \psi))$

X ψ = “next ψ ” (im unmittelbar folgenden gilt ψ) **F ψ** := (1U ψ): “finally” (irgendwann wird ψ gelten)

$\psi U \varphi$ = “ ψ until φ ” (irgendw. gilt φ davor immer ψ) **G ψ** := $\neg F\neg\psi$: “globally” (es wird immer ψ gelten)

Bsp: GF ψ : ψ in unendl. vielen Pos. || FG $\neg\psi$: ψ nur an endl. v. Pos. || G($\varphi \rightarrow (\varphi U \psi)$): für jede Pos. wo φ , ex. spät. Pos. wo ψ ; dazw. immer φ || G($(P \rightarrow X \neg P \vee \neg X I) \wedge (\neg P \rightarrow X P \vee \neg X I)$): immer P und $\neg P$ abwechs. || GF($P \wedge XQ$): unendl. P und direkt danach Q || GX1: unendlich || G($P \rightarrow GXFQ$): nach jedem P unendl. wo Q.

CTL = ML + Pfade – endl.-Modell-Eig.; SAT ist entscheidbar (in exp. Zeit); abgeschlossen; invariant unter Bisim

E($\psi U \varphi$) = “ ψ until φ ” (es ex.: davor immer ψ) **EX ψ** := $\langle \rangle \psi$, exist **Kann nicht in ML eingebettet**

A($\psi U \varphi$) = “ ψ until φ ” (für alle: davor immer ψ) **AX ψ** := $[\] \psi$, forall **werden wegen z.B Erreichbar.**

EF ψ := E(1U ψ) “es ex. ein Pf., wo irgendw. ψ gilt” **EG ψ** := $\neg AF \neg \psi$ “es ex. ein Pfad, wo immer ψ gilt”

AF ψ := A(1U ψ) “auf allen Pfaden gilt irgendw. ψ ” **AG ψ** := $\neg EF \neg \psi$ “auf allen Pfaden gilt immer ψ ”

Bsp: EF ψ : Zustand ψ ist Erreichbar || AG $\neg(P \wedge Q)$: P und Q schließen sich in allen erreichbaren Zuständen aus || AGAF ψ : ψ gilt unendlich oft auf allen Pfaden || EF($P \wedge AXAXAXQ$) wo P gilt ist erreichb. und von dem nach 3 Q

MSO = Monad. Logik 2. Stufe: FO+Quant. über 1-st. Rel.sym. (Mengenvar.): $\exists X$: es gibt TM, $\forall X$: für alle TM

Ist \leq in ($\mathbb{Z}, +$) **elem. def.'bar**? Nein: $\Pi: x \rightarrow -x$ Aut. ($f(x+x)=(fx+fx)$ & bij.), aber z.B.: $2 \leq 4$ und nicht $-2 \leq -4!$

wahr: Prim.pot. in \mathbb{N} , \cdot ; **falsch**: \mathbb{Z} in $\mathbb{Q}, + (x \rightarrow x/2)$; $+$ in \mathbb{N} , $\cdot (2^x 3^y z \rightarrow 2^y 3^x z, 0 \rightarrow 0)$; 0 in $\mathbb{Z}, < (x \rightarrow x+1)$

A:=($\mathbb{N}, +, 3, 5$) und **B**:=($\mathbb{N}, +, 3, 7$): $m=3$: $H:A, 2 \rightarrow D:B, 4 \rightarrow H:A, 1 \rightarrow D:B, x \rightarrow H:A, 3$ (kann auf 3/5 bzw. 3/7 “prüfen”)

bzw. $H:A, 2 \rightarrow D:B, x \rightarrow H:A, 5 \rightarrow D:B, 7 \rightarrow H:A, 3$ ($\blacktriangle H: 2+1=3$, prüfbar; D muss $4+x=3$, was aber nicht geht in \mathbb{N})

Theorie nicht vollständig? Suche Strukturen, die T erfüllen, aber durch FO getrennt werden können.

Dichte lin. Ord? $A=(\mathbb{Q}, \leq)$, $B=(\mathbb{Q}_0^+, \leq) \Rightarrow A|_T = T$ & $B|_T = T$. $\psi = \forall x \exists y (y < x) \Rightarrow A|_\psi = \psi$, aber $B|_\psi \neq \psi$. $\Rightarrow A \not\equiv B$

$A \equiv_m B$: Dupl. hat GS in $G_m(A, B)$, $\forall G_k(A, B) k < m$, in $G(A, B)$ **nicht** notw.; Her'f. **nicht** notw. GS in $G_{m+1}(A, B)$

Entscheidbar: Erfüllbarkeitsprob. der ML; Auswertungsprob. für FO endl. Str.; Ob ML BM hat; **nicht**: Seq. gltg

FO \rightarrow ML: ist “nicht ~-invariant”, wenn Gegenbsp. ex.! $\neg\psi \mapsto \neg\psi^*(x)$ $\langle a \rangle \psi \mapsto \exists y (E_a xy \wedge \psi^*(y))$

$\psi \in ML \mapsto \psi^*(x) \in FO^2$ $(\psi \circ \varphi) \mapsto (\psi^*(x) \circ \varphi^*(x))$ für $\circ \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$ $P_i \mapsto P_i x$ $[a] \psi \mapsto \forall y (E_a xy \rightarrow \psi^*(y))$

Seien A, A_0, A_1, \dots **abzählbare** Mengen: $A_0 \times A_2$; $\prod_{i=0}^n A_i \forall n \in \mathbb{N}$; $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$; $A^* = A \times A \times \dots \times A$

M. aller off. Interv. $(n, m) = \{ x \in \mathbb{R} | n < x < m \}$ mit $n, m \in \mathbb{N}, n < m \rightarrow$ M. aller Str. (\mathbb{N}, f) mit einer einst. Fkt. f,

deren Bildber. endl. ist = M. aller Str. (\mathbb{N}, f) mit einer einst. Fkt. $f \rightarrow$ M. aller Graph'n mit KM $\mathbb{N} \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{R})$

Ebenso: $|\mathbb{R}| = |[0, 1] \subseteq \mathbb{R}| = |\text{Pot}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

|| **Aut.gruppe**: 1.) Jede Perm. $\Pi: \{1, \dots, 4\} \rightarrow \{1, \dots, 4\}$ ist Aut.

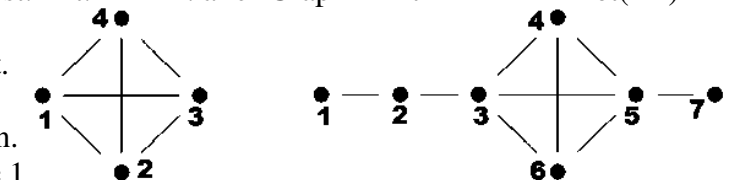
|| $(u, v) \in E^G \Leftrightarrow \Pi(u) \neq \Pi(v) \Leftrightarrow (\Pi(u), \Pi(v)) \in E^G$

|| 2.) Für jeden Aut. $\Pi: G \rightarrow G$ gilt: $\Pi(2)$ hat 2 Nachbarkn.

|| in G: $\Pi(1), \Pi(3) \Rightarrow \Pi(2) = 2$. Folglich gilt auch $\Pi(1) = 1$

|| (weil 2 einz. Nachbar) und $\Pi(7) = 7$. Auch $\Pi(3) = 3$ & $\Pi(5) = 5$. Schließl. folgt Π mit: $\Pi(4) = 6, \Pi(6) = 4, \Pi(k) = k$

|| sonst, ist der einzige nicht triv. Aut.



Lemma 3.12 (Subst.-lemma): Es gilt $[t[p]]^3 = [t]^{3 \circ p}$ &

$\mathfrak{S} = \psi[p] \Leftrightarrow (\mathfrak{S} \circ p) = \psi$. **Homomorphismus** – “Strukturerh. Abb.”: z.z.: angeg. Rel. gelten. **Einbettung**: z.z.:

$f(n) \leq f(m) \Rightarrow n \leq m$; und $n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$. **Isomorphismus**: suche z.B. nicht-ex. Bild-Elem. oder prüfe Bij.!

Axiomensys.: (f: 1-st. Rel.sym.) $K_1 = \{(A, <): < \text{dichte lin. Ord.}\}$; $\Phi_{<} \cup \{ \forall a \forall b (a < b \rightarrow \exists z (a < z \wedge z < b)) \}$

$\Phi_{<} = \{ \forall a \forall b \forall c (a < b \wedge b < c \rightarrow a < c), \forall a \forall b (a < b \vee a = b \vee b < a), \forall x (\neg(x < x)), \forall a \forall b (a < b \rightarrow \neg b < a) \}$

$K_2 = \{(A, <): A \text{ unendl. \& } < \text{ lin. Ord.}\}$; $\Phi_{<} \cup \{ \varphi_n | \varphi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \}$ $K_3 = \{(A, <): A \text{ ist endl. \& } < \text{ dichte lin. Ord.}\}$; $\Phi_{<} \cup \{ \exists x \forall y (x = y) \}$ $K_6 = \{ A \text{ endl., } f \text{ inj., aber nicht surj.} \} \Rightarrow$ leere Menge! $\Phi = \{ \exists x x \neq x \}$ $K_5 = \{ f \text{ ist inj., aber nicht surj.} \}$; $\Phi := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow fx \neq fy \wedge \exists x \forall y (f(y) \neq x))$ $K_4 = \{(A, f): |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42 \}$;

$\Phi := \{ \exists x_1 \dots \exists x_{42} (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 42} (x_i \neq x_j \wedge \forall y (f(y) \neq x_i \wedge \forall z ((\bigwedge_{1 \leq i \leq 42} z \neq x_i) \rightarrow \exists u (f(u) = z)))) \}$

Ist die Sequenz gültig? $\exists x \forall y (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x \forall y \varphi \vee \exists y \forall y \psi$ ist nicht gültig. (\Rightarrow Suche Anti-Bsp.: Struktur)

Gegenbeispiel $\mathbb{D} = (\{0, 1\}, 0, 1)$, $\varphi(x, y) := y=0$, $\psi(x, y) := y=1$. $\mathbb{D} \not\models \forall y (y=0 \vee y=1) \Rightarrow (\forall y y=0) \vee (\forall y y=1)$

$$(\exists \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad (\forall \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \quad (S \Rightarrow) \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t=t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \text{ if } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi$$

$$(\Rightarrow \exists) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \quad (\Rightarrow \forall) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)} \quad (\Rightarrow S) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t=t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \quad (=) \frac{\Gamma, t=t' \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Graphen, Gruppen, lin. Ord., Äquivalenzstr., part. Ord., dichte lin. Ord., diskrete lin. Ord., Ringe und Körper sind

endlich axiomatisierbar. Unendliche Strukturen sind FO-ax., aber **nicht** endl. ax.

hat nach 2 Zügen verloren: $V_0 x \wedge \neg \exists y Exy \vee \forall z (Exz \rightarrow V_0 x \wedge \neg \exists y Exy)$